

그린 정리

1. 그린정리(Green's Theorem)

그린(George Green, 1793~1841) 영국의 수학자. 빵 제조업을 하면서 수학을 독학. 1828년 수학적 해석법의 전자기학 응용에 관한 논문 《전자기학 이론에서의 수학 해석응용》을 자비로 출판하였다.

이 논문은 약 20년간 학자들의 관심을 끌지 못했으나 그 중 이른바 「그린 정리」, 「그린 함수」는 가우스에게 발견되고 1846년 켈빈이 다시 간행하여 새삼 수리물리학계에서 각광을 받았다.

그린 정리는 벡터 미적분학(vector calculus)에서 중요한 테마 중 하나이다. 그린정리는 벡터 미적분학의 꽃이라고 할 수 있는 가우스 정리(Gauss' theorem)와 스토크스 정리(Stokes' theorem)의 기본 바탕이 되기 때문이다.

그린 정리(Green's theorem)는 평면 영역에서의 벡터 이중적분(double integral)을 그 영역의 경계선에서의 벡터 선적분(line integral)으로 계산가능하게 하여 이중적분의 계산을 단순하게 해준다. 반대로 경계선에서의 선적분을 영역에 대한 이중적분으로 변환하는 것 역시 가능하다. 스토크스 정리는 곡면에서의 정리이고, 그린 정리는 평면에서의 문제로 제한되는 특징을 가진다.

▶ 그린정리의 설명

경로 C 는 평면에서 조각적 미분가능(piecewise smooth)한 단순한 닫힌 곡선(simple closed curve)이라고 하고, 영역 D 는 C 를 경계로 가진다고 하자.

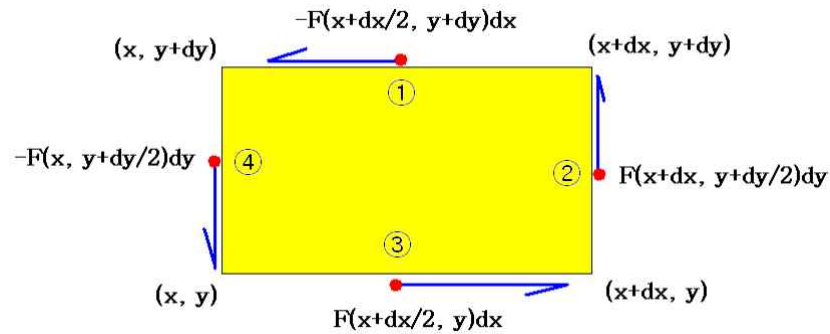
영역 D 의 벡터함수 $\vec{F}(x,y) = M\hat{x} + N\hat{y}$ 가 연속이고, $\vec{F}$ 의 각각의 성분 M, N 이 연속인 편도함수 $\frac{\partial M}{\partial y}$ 와 $\frac{\partial N}{\partial x}$ 를 가진다고 하자. 그러면

$$\oint_c Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) d\vec{A}$$

이 성립한다. 여기서 적분은 영역 D 의 경계를 따라 수행되며, 경로 C 은 적분 진행방향의 왼쪽에 위치한다. 즉, 적분의 진행방향은 반시계방향인 것을 의미한다.

▶ 그린 정리(Green theorem) 유도

영역 D 내부에서 미소 사각형 하나를 생각해보자. 사각형 각각의 꼭지점의 좌표와 사각형을 이루는 4개의 각각의 선분에서 벡터들의 성분을 계산하면 다음과 같다.



주어진 벡터 $\vec{F}(x,y) = M\hat{x} + N\hat{y}$ 에서 각각의 적분 적분구간 그리고 벡터의 성분을 적용하여 폐곡선에 대한 벡터의 총합 ①+②+③+④을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & -M(x + \frac{dx}{2}, y + dy)dx + N(x + dx, y + \frac{dy}{2})dy + M(x + \frac{dx}{2}, y)dx - N(x, y + \frac{dy}{2})dy \\ & = [N(x + dx, Y) - N(x, Y)]dy - [M(X, y + dy) - M(X, y)]dx \end{aligned}$$

여기서, $X = x + \frac{dx}{2}$, $Y = y + \frac{dy}{2}$ 으로, 계산구간에서의 좌표값을 의미하는 새로운 변수이다.

영역 D 의 면적을 최소화하기 위하여 즉, 극한을 취하기 위하여 다음과 같은 미분정의식

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

에 다변수 함수이므로 변미분을 적용하면

$$\begin{aligned} & = [\frac{\partial N}{\partial x}dx]dy - [\frac{\partial M}{\partial y}dy]dx \\ & = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy \end{aligned}$$

이 된다. 여기서, $dxdy$ 는 면적에 대한 이중적분을 의미하므로 다음과 같은 그린정리가 유도된다.

$$\oint_c Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) d\vec{A}$$

▶ 그린 정리(Green theorem) 활용

평면상의 각 점마다 다음과 같이 벡터장이 구성되어 있다고 하자.

$$\vec{F}(x,y) = (x-y)\hat{x} + x\hat{y}$$

여기서, $\hat{x}$, $\hat{y}$ 는 좌표축에 대한 단위벡터를 의미한다. 적분영역 D 는 다음과 같이 원점을 중심으로 반지름이 1인 단위원으로 주어졌다고 하자.

매개변수 표기법 즉, 극좌표 표기법의 경우, $\vec{r}(t) = r\cos t\hat{x} + r\sin t\hat{y}$ 으로 이지만, 반지름이 1인 원 즉, $r=1$ 이므로 다음과 같다.

$$\vec{r}(t) = \cos t\hat{x} + \sin t\hat{y}$$

이러한 벡터함수에 대하여 그린정리의 좌변과 우변을 각각 계산하여 등식이 성립하는지 확인하면 다음과 같다.

① 좌변

벡터함수의 편미분들을 계산한다.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\int \int_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) d\vec{A} = \int \int_D (1 - (-1)) dx dy = 2 \int \int_D dx dy = 2\pi$$

마지막 식의 이중적분은 반지름이 1인 원의 면적을 의미하기 때문이다.

② 우변

원위의 점을 따라가며 형성되는 벡터함수 값을 찾는다.

$$M = \cos t - \sin t, \quad N = \cos t$$

선적분에 필요한 연쇄법칙(Chain rule)을 계산한다.

$$dx = d(\cos t) = -\sin t dt, \quad dy = d(\sin t) = \cos t dt$$

반시계 방향으로 회전하며 우변을 적분한다.

$$\begin{aligned}\int_C Mdx + Ndy &= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t)((-\sin t)dt) + (\cos t)(\cos t dt) dt \\ &= \int_0^{\pi} (-\sin t \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) dt = \int_0^{\pi} (-\sin t \cos t + 1) dt = 2\pi\end{aligned}$$

좌변과 우변이 같음을 확인할 수 있다.

► 주의사항

그린정리는 $\oint Mdx + Ndy = \iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$ 가 성립한다는 것이다.

만약에 $M = \frac{-y}{(x^2 + y^2)}$, $N = \frac{x}{(x^2 + y^2)}$ 이고, 곡선이 $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 일 때,

N 을 x 로 편미분하면, $\frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ 으로 M 을 y 로 편미분한 것과 같아진다. 그린정리를 적용하면, 우변은 0이 되는데 좌변의 결과는 2π 가 된다. 이유는 다음과 같다.

그린정리를 이용하기 위해서는 주어진 곡선 내의 영역 (여기서는 원점을 중심하는 반지름 1인 원)에서 주어진 벡터장 $F = (M, N)$ 이 연속이어야 한다는 조건이 성립해야한다. 즉, 2차원 상에서 그린정리는 발산정리와 다를 것이 없다. 여기서 필요한 조건은 주어진 곡선 내 영역에서 벡터장이 연속이어야 한다는 것이다. 그런데 주어진 벡터장의 경우에는 영역내의 점 $(0,0)$ 에서 연속이 되지 않으므로 애초에 그린정리를 사용할 수가 없다. 따라서 양변이 같지 않은 모순이 발생할 수밖에 없다. 정확한 결과를 얻기 위해서는 원점을 제외한 새로운 영역을 잡아야 한다.