



제6장 역행렬과 행렬식



역행렬의 정의

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$ 에 대해서

$$(5.1) \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

을 만족하는 $n \times n$ 행렬 $\mathbf{B}$ 가 존재하면 $\mathbf{A}$ 를 가역(invertible) 또는 비특이(nonsingular) 행렬이라 한다. 그리고 $\mathbf{B}$ 를 $\mathbf{A}$ 의 역행렬(inverse matrix)이라 하며 $\mathbf{A}^{-1}$ 으로 나타낸다.



예

.....
 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 에서 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_2$ 임을 보이시오.

[풀이]

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 7(-2) & 3(-7) + 7 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 + 5(-2) & 2(-7) + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + (-7)2 & 5 \cdot 7 + (-7)5 \\ (-2)3 + 3 \cdot 2 & (-2)7 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_2$ 이므로 $\mathbf{B}$ 를 $\mathbf{A}$ 의 역행렬이라 하며 $\mathbf{A}$ 는 비특이행렬이다.



정의에 의한 역행렬 계산

예

.....

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때 $\mathbf{A}^{-1}$ 을 구하시오.



역행렬의 유일성

[정리 6.1] (역행렬의 유일성)

크기가 n 인 정방행렬 A, B, C 에 대하여 B 와 C 가 모두 A 의 역행렬이면
 $B = C$ 이다.

.....



2x2행렬의 역행렬

[정리 6.2] (2x2 행렬의 역행렬)

2×2 행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 는 $ad - bc \neq 0$ 일 때 역행렬을 가지며 $\mathbf{A}$ 의 역행렬은

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

이다.¹



역행렬의 성질

[정리 6.3] (역행렬의 성질)

행렬 A , B 에 대하여

- ① 행렬 A 가 비특이행렬이면 A^{-1} 역시 비특이행렬이며 $(A^{-1})^{-1} = A$ 이 성립한다.
- ② 행렬 A 와 행렬 B 가 비특이행렬이면 AB 도 비특이행렬이며 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 이 성립한다.
- ③ 행렬 A 가 비특이행렬이면 A^T 도 비특이행렬이며 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 이 성립한다.

.....



대각행렬의 역행렬

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{D}$ 가

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

와 같은 형식의 대각행렬이고 주대각요소 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 이 모두 영이 아니면 $\mathbf{D}$ 는 비특이행렬이고 $\mathbf{D}$ 의 역행렬은

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix}$$



기본행렬의 역행렬

[정리 6.4] (기본행렬의 역행렬)

기본행렬 E 는 비특이행렬이며 E 의 역행렬 E^{-1} 은 기본행렬이다.

.....

[정리 6.5] (비특이행렬, 동차연립방정식, 항등행렬, 기본행렬간의 관계)

$n \times n$ 행렬 A 에 대한 다음의 명제들은 서로 필요충분조건이다.

- ① A 는 비특이행렬이다.
 - ② $AX = 0$ 는 자명해만을 갖는다.
 - ③ A 와 I_n 은 행동치이다.
 - ④ A 는 기본행렬의 곱으로 나타낼 수 있다.
-



역행렬을 구하는 실용적 방법

A 의 역행렬을 계산하기 위한 절차는 다음과 같다.

- 1 단계 : 주어진 행렬 A 에 크기가 같은 항등행렬 I_n 을 붙여 $n \times 2n$ 행렬 $(A|I_n)$ 을 구성한다.
- 2 단계 : 1 단계에서 구성한 행렬을 기본행연산을 사용하여 기약가우스행렬로 변형시킨다.
- 3 단계 : 2 단계에서 구한 기약가우스행렬을 $(C|D)$ 라고 하자. $C = I_n$ 이면 A 는 비특이행렬로 $A^{-1} = D$ 이고, $C \neq I_n$ 이면 A 는 특이행렬로 A^{-1} 이 존재하지 않는다.



역행렬 계산 연습

예

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{의 역행렬을 구해보자.}$$

예

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{의 역행렬을 구해보자.}$$



역행렬과 연립일차방정식

[정리 6.7] (역행렬과 연립일차방정식)

$n \times n$ 행렬 A 이 비특이행렬이면 연립일차방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 는 유일한 해 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ 을 갖는다.

.....

예

연립일차방정식

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

의 해를 구하시오.



순열

1 부터 n 까지의 정수를 오름차순으로 놓은 집합 $\{1, 2, \dots, n\}$ 에서 원소를 재배열해 놓은 것 $j_1 j_2 \dots j_n$ 을 $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 순열(permutation)이라 한다. P_n 을 $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 모든 순열의 집합이라 하자. P_n 의 원소의 개수는 $n!$ 이 된다.

예

$$P_2$$

$$P_3$$



반전수/기순열/우순열

$\{1, 2, \dots, n\}$ 의 순열 $j_1 j_2 \dots j_n$ 에 $j_i > j_k (i < k)$ 이 존재하면 이를 반전(反轉, inversion)이라 하고 어떤 순열에서 발생하는 반전의 개수를 반전수(反轉數, number of inversions)이라 한다. 그리고 반전수가 짝수인 순열을 우순열(偶順列, even permutation), 홀수인 순열을 기순열(奇順列, odd permutation)이라 부른다.



예

$\{1, 2, 3\}$ 의 순열들을 살펴보자.

순열	추월	추월수	종류
$j_1 j_2 j_3$			
1 2 3		0	우
1 3 2	$j_2 > j_3$	1	기
2 1 3	$j_1 > j_2$	1	기
2 3 1	$j_1 > j_3, j_2 > j_3$	2	우
3 1 2	$j_1 > j_2, j_1 > j_3$	2	우
3 2 1	$j_1 > j_2, j_1 > j_3, j_2 > j_3$	3	기





기본곱

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ 를 $n \times n$ 행렬이라 할 때 각 행과 각 열에서 하나씩 선택한 요소를 곱해놓은 것을 행렬 $\mathbf{A}$ 의 기본곱(elementary product)이라 한다. 행렬 $\mathbf{A}$ 의 기본곱은 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ (여기서 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 은 $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 순열)으로 나타낼 수 있으며 따라서 행렬 $\mathbf{A}$ 의 기본곱의 개수는 $n!$ 개가 된다.

예

.....

3×3 행렬

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

의 기본곱을 모두 구하면

부호부기본곱

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 의 기본곱 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ (여기서 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 은 $\{1, 2, \dots, n\}$ 의 순열)에서 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 이 우순열이면 $+$, 기순열이면 $-$ 를 붙여

$$(\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

로 나타내고 이를 부호부기본곱(signed elementary product)이라 한다.

예

3×3 행렬

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

의 모든 부호부기본곱을 구하시오.

행렬식

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 의 모든 부호부기본곱의 합을 행렬 $\mathbf{A}$ 의 행렬식 (determinant)이라 하고 이를 $|\mathbf{A}|$ 또는 $\det(\mathbf{A})$ 로 나타낸다. 즉

$$(5.3) \quad |\mathbf{A}| = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

이다.

예|.....

2×2 행렬

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

3x3행렬의 행렬식

3×3 행렬

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

의 행렬식은

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

- - - + + +



예

.....

3×3 행렬

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

에 대하여 $|\mathbf{A}|$ 를 구해보자.



0 행/열이 포함된 행렬의 행렬식

[정리 6.8] (모든 요소가 0으로 된 행 / 열이 존재하는 행렬의 행렬식)

행렬 A 에 대하여 모든 요소가 0으로 이루어진 행 또는 열이 존재하면 $|A| = 0$ 이 된다.

예

3×3 행렬

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

에 대하여 $|A|$ 를 구해보자.



삼각행렬의 행렬식

[정리 6.9] (삼각행렬의 행렬식)

크기 n 의 정방행렬 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 가 삼각행렬이면 $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ 이다.

.....

예

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

에 대하여 $|\mathbf{A}|$ 를 구해보자.



전치행렬의 행렬식

[정리 6.10] (전치행렬의 행렬식)

행렬 $\mathbf{A}$ 에 대하여 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ 이 성립한다.

.....

예

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

에서 $|\mathbf{A}|$ 와 $|\mathbf{B}|$ 를 구해보자.



행렬곱의 행렬식

[정리 6.11] (행렬곱의 행렬식)

행렬 A 와 B 에 대하여 $|AB| = |A| \cdot |B|$ 이 성립한다.

.....

예

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

에서 $|A|$, $|B|$, $|AB|$ 를 구해보자.



기본행연산이 행렬식에 미치는 영향

[정리 6.12] (두 행/열의 교환과 행렬식)

- ① 행렬 A 에 대해서 두 행을 교환한 결과를 B 라 하면 $|B| = -|A|$ 이 성립한다.
 - ② 행렬 A 에 대해서 두 열을 교환한 결과를 B 라 하면 $|B| = -|A|$ 이 성립한다.
-

예

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

에서 $|A|$, $|B|$ 를 구해보자.



기본행연산이 행렬식에 미치는 영향

[정리 6.13] (기본행연산과 행렬식)

- ① 행렬 A 의 p 번째 행에 $\alpha (\alpha \neq 0)$ 를 곱한 행렬을 B 라 하면 $|B| = \alpha |A|$ 가 성립한다.
 - ② 행렬 A 의 p 번째 행에 q 번째 행 $\times \alpha (\alpha \neq 0)$ 를 더한 행렬을 B 라 하면 $|B| = |A|$ 가 성립한다.
-

예

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

에서 $|A|$ 를 구해보자.



행렬식과 비특이성

[정리 6.14] (행렬식과 비특이성)

행렬 A 가 비특이행렬이면 $|A| \neq 0$ 이고 그 역도 성립한다.

.....

[정리 6.15] (행렬식과 동차연립방정식의 해)

A 가 $n \times n$ 행렬이라 하자. 동차연립방정식 $AX = 0$ 이 비자명해를 가지면 $|A| = 0$ 이고 그 역도 성립한다.

.....



소행렬식/여인수

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ 를 $n \times n$ 행렬이라 하자. 그리고 $\mathbf{M}_{ij}$ 를 $\mathbf{A}$ 에서 i 번째 행과 j 번째 열을 삭제한 $(n-1) \times (n-1)$ 행렬이라 하자. $|\mathbf{M}_{ij}|$ 를 a_{ij} 의 소행렬식(小行列式, minor)이라 하며 $A_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{M}_{ij}|$ 을 a_{ij} 의 여인수(餘因數, cofactor)라고 한다.

예

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

에서 a_{22} 에 대한 여인수 A_{22} 를 구하시오.



여인수전개

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ 를 $n \times n$ 행렬이라 하자. 그러면 각 i 에 대하여

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

을 행렬식 $|\mathbf{A}|$ 의 i 번째 행에 따른 여인수전개(餘因數展開, cofactor expansion)라고 한다. 그리고 각 j 에 대하여

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

을 행렬식 $|\mathbf{A}|$ 의 j 번째 열에 따른 여인수전개라고 한다.



예

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

에서 $|\mathbf{A}|$ 를 여인수전개를 활용하여 구해보자.

수반행렬

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ 를 $n \times n$ 행렬이라 하자. 각 a_{ij} 의 여인수 A_{ij} 를 모아 이를 전치시킨 행렬을 $\mathbf{A}$ 의 수반행렬(隨伴行列, adjoint matrix)이라 하며 $\text{adj}\mathbf{A}$ 로 나타낸다. 즉

$$\text{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

이다.



수반행렬과 역행렬

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ 이 $n \times n$ 행렬이고 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 일 때 $\mathbf{A}$ 의 역행렬은 $adj\mathbf{A}$ 앞에 $1/|\mathbf{A}|$ 를 곱해서 구할 수 있다. 즉

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} adj\mathbf{A}$$

이다.

예

.....

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 의 역행렬을 전치여인자행렬을 사용해서 구해보자.



크래머의 법칙

$\mathbf{A}$ 의 크기가 $n \times n$ 이고 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 인 연립 1차방정식 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 에 대해서 $\mathbf{A}_j$ 를 $\mathbf{A}$ 의 j 번째 열을 $\mathbf{B}$ 로 대체한 행렬이라 할 때 변수 x_j 의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

이를 크래머(Cramer)*의 법칙이라고 한다.

예

.....
연립 1차방정식

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & = & -3 \\ -x & - & 2y & = & 2 \end{array}$$

의 해를 크래머의 법칙으로 구해보자.

제 3부 선형 대수 방정식 – LU분해법(L:Lower, U:Upper)

개념

$$[A]\{x\}=\{B\}$$

$$[A]\{x\}-\{B\}=0$$

$$[A]=[L][U]$$

$[U]\{x\}-\{D\}=0$ 를 만족하는 $\{D\}$ 가 있다고 가정하고
여기에 $[L]$ 를 곱한 식이 원식이 된다고 하면.....

$[L]\{[U]\{x\}-\{D\}\}=[A]\{x\}-\{B\}$ 를 얻을 수 있다. 여기서

$$[L]\{D\}=\{B\}$$

$$[U]\{x\}=\{D\}$$

ex)
$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 x_1 \\ d_2 x_2 \\ d_3 x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 d_1 \\ b_2 d_2 \\ b_3 d_3 \end{bmatrix}$$

$$d_3 = \frac{b_3}{l_{33}}$$

$$d_2 = \frac{b_2 - l_{23}d_3}{l_{22}}$$

$$d_1 = \frac{b_1 - l_{12}d_2 - l_{13}d_3}{l_{11}}$$

구분 ([A]=[L][U]로 분해하는 방법에 따라)

1. Doolittle분해 : $[L]$ 의 대각요소를 1이 되도록 분해하는 방법

2. Crout분해 : $[U]$ 의 대각요소를 1이 되도록 분해하는 방법

제 3부 선형 대수 방정식 – LU분해법(L:Lower, U:Upper)

■ Doolittle 분해 : $[L]$ 의 대각요소를 1이 되도록 분해

※ 가우스 소거법의 전진소거한 결과가 상삼각 행렬이 된다.

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$[A]=[L][U]$ 으로부터 하삼각행렬을 구할 수 있지요.....

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ l_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad l_{21} = \frac{2}{1} = 2, l_{31} = \frac{-1}{1} = -1 \\ l_{32} = \frac{3}{-3} = -1$$

제 3부 선형 대수 방정식 – LU분해법(L:Lower, U:Upper)

■ 예제 10.1 ~10.2

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.29333 \\ 0 & -0.19000 & 10.0200 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0200 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0200 \end{bmatrix}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0.1}{3} = 0.03333$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0.3}{3} = 0.10000$$

$$l_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{-0.19000}{7.00333} = -0.02710$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.03333 & 1 & 0 \\ 0.10000 & -0.02710 & 1 \end{bmatrix}$$

제 3부 선형 대수 방정식 – LU분해법(L:Lower, U:Upper)

■ 예제 10.1 ~10.2

$$[L]\{D\} = \{B\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.03333 & 1 & 0 \\ 0.10000 & -0.02710 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = \frac{7.85}{1} = 7.85$$

$$d_2 = \frac{-19.3 - 0.03333 \times 7.85}{1} = -19.5617$$

$$d_3 = \frac{71.4 - 0.10000 \times 7.85 + 0.02710 \times (-19.5617)}{1} = 70.0843$$

$$[U][X] = [D] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.29333 \\ 0 & 0 & 10.0200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{Bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0200} = 7.00003$$

$$x_2 = \frac{-19.5617 + 0.29333 \times 7.00003}{7.00333} = -2.50000$$

$$d_3 = \frac{7.85 + 0.1 \times (-2.50000) + 0.2 \times (7.00003)}{3} = 3.00000$$

제 3부 선형 대수 방정식 – LU분해법(L:Lower, U:Upper)

■ Crout 분해 : [U]의 대각요소를 1이 되도록 분해

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [L][U]$$

$$l_{11} = a_{11}$$

$$l_{i1} = a_{i1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$l_{21} = a_{21}$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

$$l_{31} = a_{31}$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12}$$

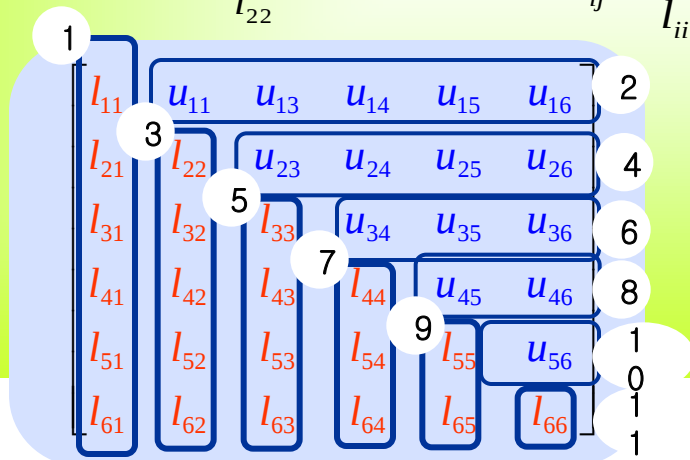
$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \quad (j \leq i, i = 2, 3, \dots, n)$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$$

$$u_{23} = \frac{1}{l_{22}}(a_{23} - l_{21}u_{13})$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \right] \quad (i < j, j = 3, 4, \dots, n)$$



제 3부 선형 대수 방정식 – LU분해법(L:Lower, U:Upper)

■ 예제

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ 2 & -4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = a_{11} = 3$$

$$l_{21} = a_{21} = 1$$

$$l_{31} = a_{31} = 2$$

$$l_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^1 l_{2k} u_{k2} = 2 - 1 \times \left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{7}{3}$$

$$l_{32} = a_{32} - \sum_{k=1}^1 l_{3k} u_{k2} = -2 - 2 \times \left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{-4}{3}$$

$$l_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^2 l_{3k} u_{k3} = -1 - \left\{ 2 \times \frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{3} \right) \times 1 \right\} = -1$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-1}{3}$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{2}{3}$$

$$u_{23} = \frac{1}{l_{22}} \left[a_{23} - \sum_{k=1}^1 l_{2k} u_{k3} \right] = \frac{1}{7} \left\{ 2 \times \frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{3} \right) \times 1 \right\} = 1$$

제 3부 선형 대수 방정식 – LU분해법(L:Lower, U:Upper)

■ 예제

$$[L]\{D\} = \{B\} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ 2 & -4/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = \frac{12}{3} = 4$$

$$d_2 = \frac{11 - 1 \times 4}{7/3} = 3$$

$$d_3 = \frac{2 - 2 \times 4 - (-4/3 \times 3)}{-1} = 2$$

$$[U][X] = [D] = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_2 = \frac{3 - 1 \times 2}{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{4 - (-1/3) \times 1 - 2/3 \times 2}{1} = 3$$



3.9 고유값과 고유 벡터

[정의 3-25] 고유값과 고유 벡터

- 행렬 $A: n \times n$ 인 정방 행렬
- $Av = \lambda v$ 를 만족하는 스칼라 λ , 0 이 아닌 n -차원 벡터 v 가 있을 때,
 - λ : A 의 고유값,
 - v : λ 에 대응되는 고유 벡터



3.9 고유값과 고유 벡터

【예제 3.29】 행렬 A 에서 $Av = \lambda v$ 를 만족시키는 스칼라 λ 와 0 이 아닌 2-차원 벡터 v 를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$



3.9 고유값과 고유 벡터

[풀이]

* $v = (v_1, v_2)$ 라 하자.

$$Av = \begin{bmatrix} 9v_1 \\ 3v_1 - 2v_2 \end{bmatrix}$$

이고, $\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2)$ 이다.

따라서, $\lambda = 9$ 이며, $v_1 = \frac{11v_2}{3}$ 이다

* $\lambda = 9$ 일 때, $v = (11, 3)$ 은 $Av = \lambda v$ 를 만족시키는 0이 아닌 벡터이다.



3.9 고유값과 고유 벡터

- * $n \times n$ 인 정방 행렬 A 는 한 개 이상의 고유값을 갖는다.
- * I 가 $n \times n$ 인 단위 행렬일 때 $Av = \lambda v$ 를 $Av = \lambda Iv$ 로 표현하거나 $v \neq \theta$ 일 때 $Av = \lambda v$ 를 $(\lambda I - A)v = \theta$ 로 표현할 수 있다.
- * 스칼라 λ 가 A 의 고유값이기 위한 필요 충분 조건은 방정식 $(\lambda I - A)v = \theta$ 가 θ 이 아닌 해를 갖는 경우이다.



3.9 고유값과 고유 벡터

[정의 3-26] 특성 방정식(characteristic equation)

특성 다항식(characteristic polynomial)

- A의 특성 방정식: 방정식 $\det(\lambda I - A) = 0$
- A의 특성 다항식: 다항식 $\det(\lambda I - A)$
- 스칼라 λ 는 A의 고유값



3.9 고유값과 고유 벡터

- * 행렬 A 가 $n \times n$ 인 정방 행렬이면, A 의 특성 다항식은 차수(degree) n 을 갖고, λ^n 의 계수(coefficient)는 1이다. 따라서, $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_n$ 인 실수 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 이 존재한다.



3.9 고유값과 고유 벡터

【예제 3.30】 행렬 A 의 고유값을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

[풀이]

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$



3.9 고유값과 고유 벡터

A의 특성 방정식은 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

해는 $\lambda = 2, \lambda = 3$

$\therefore$ A의 고유값: 2, 3

- * A의 고유값 λ 를 구하면, 방정식 $(\lambda I - A)v = 0$ 을 계산함으로써 A의 고유 벡터 v 를 구할 수 있다.



3.9 고유값과 고유 벡터

【예제 3.31】 앞의 [예제 3.30]에서 $\lambda = 2$ 와 $\lambda = 3$ 에 대응되는 고유 벡터를 구하라.

[풀이]

$\lambda = 2$ 에 대응되는 고유 벡터는 $(2I - A)v = \theta$ 를 만족하는 0이 아닌 벡터 v

$$2I - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \theta$$



3.9 고유값과 고유 벡터

해는 $v_1 = 2v_2$ 이므로 $(2I - A)v = \theta$ 의 모든 해는

$$v = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{의 형태를 갖는다.}$$

$\lambda = 3$ 에 대응되는 고유 벡터는 $(3I - A)v = \theta$ 를 만족시키는 0이 아닌 벡터

$\therefore$ 고유값 $\lambda = 2$, 고유벡터

$$V = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0$$

고유값 $\lambda = 3$, 고유벡터

$$V = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0$$



3.9 고유값과 고유 벡터

[정리 3-11]

A 가 $n \times n$ 인 정방 행렬이면, 다음 문장은 동치이다.

- (1) λ 는 A 의 고유값이다.
- (2) 방정식 $(\lambda I - A)v = \mathbf{0}$ 은 $\mathbf{0}$ 이 아닌 근을 갖는다.
- (3) R^n 에는 $Av = \lambda v$ 를 만족시키는 $\mathbf{0}$ 이 아닌 벡터 v 가 있다.
- (4) λ 는 A 의 특성 방정식의 근이다.



3.9 고유값과 고유 벡터

【예제 3.32】 행렬 A 의 고유값을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$



3.9 고유값과 고유 벡터

[풀이]

A의 특성 다항식

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 & -1 \\ 6 & \lambda+2 & 0 \\ -19 & -5 & \lambda+4 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 \end{aligned}$$

$$\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = (\lambda + 8)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$\therefore \lambda = -8$ 은 A의 유일한 고유값



3.9 고유값과 고유 벡터

【예제 3.33】 앞의 [예제 3.32]에서 A 의
고유 값에 대응하는 고유 벡터를 구하라.

[풀이]

* $(-8I - A)v = 0$ 의 0이 아닌 근으로

$$v_2 = v_1, v_3 = -6v_1$$
$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, a \neq 0$$